# LICEO DELLE SCIENZE APPLICATE

**A.S 2024/25**

# SIMULAZIONE SECONDA PROVA ESAME - 03 APRILE 2024

**Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 4 quesiti del questionario.**
**Durata massima della prova: 6 ore.**
**È consentito l'uso di calcolatrici scientifiche e/o grafiche purché non siano dotate di capacità di calcolo simbolico (O.M. n. 205 Art. 17 comma 9).**

## PROBLEMA 1

In un sistema di riferimento cartesiano si consideri la famiglia di funzioni:

$$f_a(x) = (x-a)\cdot e^{\left(2-\frac{x}{a}\right)} \quad \text{con} \quad a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

a) Si determini per quali valori di $a$ la funzione $f_a(x)$ presenta un minimo o un massimo assoluto nel suo dominio.

b) Sia $P_a$ il punto in cui $f_a(x)$ interseca l'asse delle ascisse. Si dimostri che le rette tangenti ai grafici delle $f_a(x)$ nei punti $P_a$ sono tutte parallele tra loro.

c) Si considerino le funzioni $f_a(x)$ che hanno un punto di massimo assoluto: si dimostri che hanno un flesso in un punto del primo quadrante e che le tangenti nel punto di flesso sono tutte parallele tra loro.

d) La conclusione del punto c) e vera anche per le funzioni che hanno un minimo assoluto?

e) Si determini il valore di $a$ per il quale la funzione $f_a(x)$ presenta un asintoto orizzontale destro ed è tale che la tangente nel punto di flesso forma con gli assi cartesiani un triangolo di area $A = \dfrac{25}{e}$

f) Si studi la funzione per $a = 1$

## PROBLEMA 2

La cinciallegra è un piccolo uccello dalla caratteristica colorazione giallo-verde molto diffuso in Europa e nel Nord Africa. Le cinciallegre vivono in stormi numerosi, adattandosi alle diverse tipologie di habitat. L'andamento della popolazione di uno stormo isolato di cinciallegre può essere descritto da un modello malthusiano continuo

$$N(t) = N(t_0)e^{\left(k-\frac{1}{2}\right)(t-t_0)} \quad , \quad \text{per} \quad t \geq t_0$$

dove $t_0$ indica l'istante iniziale dell'osservazione $t$ il generico istante di tempo, entrambi espressi in anni, e $N(t)$ è il numero di esemplari dello stormo all'istante $t$ . La costante $k$ rappresenta il tasso di natalità annuo, mentre la costante $\frac{1}{2}$ è il tasso di mortalità annuo della specie.

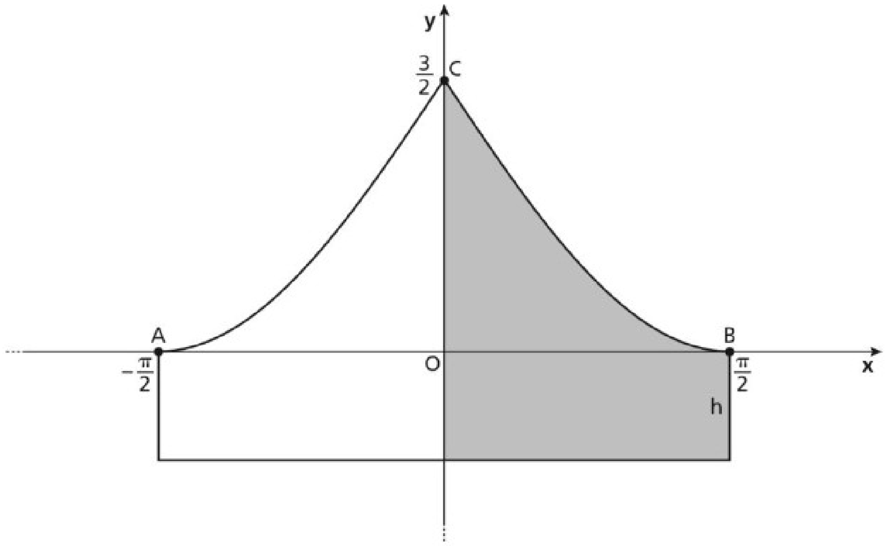
Un ornitologo sta studiando l'andamento di una popolazione isolata di cinciallegre e nota che la metà degli esemplari del gruppo sono femmine. Ogni femmina depone in media 10 uova nella stagione riproduttiva. L'84% delle uova deposte si schiude e di questi pulcini solo il 71% raggiunge i tre mesi d'età. Purtroppo, solo il 10% dei giovani esemplari sopravvive alla stagione invernale.

1. Usa le informazioni ricavate dall'ornitologo per calcolare la costante $k$ .
2. Dopo aver verificato che $k$ = 0,2982, scrivi l'espressione analitica della funzione $N(t)$ , sapendo che l'ornitologo all'istante $t_0 = 0$ anni conta 50 esemplari adulti nello stormo in esame. Studia e rappresenta graficamente la funzione $N(t)$ .

   Dimostra che lo stormo di cinciallegre in esame è destinato all'estinzione in assenza di nuovi inserimenti o migrazioni.

   Calcola il tempo necessario affinché il gruppo iniziale si dimezzi e determina, in tale istante, il valore della velocità di variazione del numero di esemplari.

Per proteggere dai predatori le nidiate, l'ornitologo progetta delle casette in legno da distribuire sugli alberi. Ogni casetta è costituita da un cilindro di altezza h, coperto da un tetto impermeabilizzato, e ha il profilo mostrato in figura, in cui le misure sono riportate in decimetri.




3. Individua quale delle seguenti funzioni descrive il profilo del tetto e determina il valore del parametro $a$ , affinché la funzione soddisfi le condizioni deducibili dal grafico:

$$y = a \cos x \quad , \quad y = a\,(1 - |x|) \quad , \quad y = a\,(1 - \sin|x|)$$

4. Per agevolare lo scolo dell'acqua piovana il culmine del tetto deve presentare un angolo

   acuto. Dopo aver verificato che la funzione al punto **3** che ben rappresenta il profilo del tetto è $y = \frac{3}{2}\,(1 - \sin|x|)$ per $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ , dimostra che tale profilo soddisfa anche la richiesta relativa all'angolo al culmine del tetto.

**QUESTIONARIO**

1) Sia $f(x) = \sin x + \cos x$ . Determina $f^{(2025)}(x)$ (ossia la derivata di ordine 2025) esplicitando, in modo chiaro ed esauriente, il procedimento seguito.

2) Considera la funzione:

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x^2} & se \quad 0 \le x \le 3 \\ a + b\sqrt{4-x} & se \quad 3 < x \le 4 \end{cases}$$

con $a, b \in \mathbb{R}$

a) Determina per quali valori dei parametri a e b la seguente funzione permette l'applicazione del Teorema di Lagrange nell'intervallo $[0;4]$ .

b) Con i parametri trovati è possibile applicare nello stesso intervallo anche il Teorema di Rolle? Perché?

3) Determina le coordinate dei punti dello spazio che giacciono sulla retta perpendicolare nel punto $[1;1;1]$ al piano di equazione $2x - y - z = 0$ , a distanza 6 da tale piano.

4) Per quale valore del parametro $k$ nella funzione $f(x) = \dfrac{kx^2 - 2x}{3x - 2}$ si ha $\lim\limits_{x \to \infty} f'(x) = -2$

Che significato assume tale limite?

5) Una scatola contiene 16 palline numerate da 1 a 16.

a) Se ne estraggono 3, una alla volta, rimettendo ogni volta nella scatola la pallina estratta. Qual è la probabilità che il primo numero estratto sia 10 e gli altri due minori di 10?

b) Se ne estraggono 5 contemporaneamente. Qual è la probabilità che il più grande dei numeri estratti sia uguale a 13?

6) Dimostra, attraverso la definizione, che la derivata di $f(x) = e^{ax}$ è $f'(x) = a\, e^{ax}$

7) Dimostra, senza risolverla, che l'equazione $2x^3 + 3x^2 + 6x + 12 = 0$ ammette una ed una sola soluzione reale.

8) Il centro di una superficie sferica $S$ è il punto di intersezione tra la retta $r$ individuata dalle equazioni:

$$\begin{cases} x + y - 2z = 0 \\ 3x + 2y - 1 = 0 \end{cases}$$

e la retta $t$ passante per i due punti $A(-2;3;0)$ e $B(2;-1;2)$ .

La superficie $S$ è inoltre tangente al piano $\alpha$ di equazione $4x - 2y - 4z + 1 = 0$

Scrivi l'equazione della superficie $S$ .